

Szybka powtórka przed egzaminem...

Rozwiązania I

Zadanie 1

Poprawna odpowiedź

E

Wyjaśnienia

Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć drugą potęgę liczby wymiernej oraz czy potrafisz porównać liczby.

- W pierwszej kolejności musisz zamienić liczbę mieszaną $(-1\frac{2}{3})$ na ułamek niewłaściwy $(-\frac{5}{3})$, aby móc zastosować własność potęgi ilorazu.
- Otrzymany ułamek $(-\frac{5}{3})$ podnieś do potęgi drugiej, stosując własność potęgowania ilorazu, czyli:

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$$

- Otrzymany wynik zapisz w postaci mieszanej, czyli

$$\frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$$

- Porównaj otrzymany wynik $2\frac{7}{9}$ z podanymi liczbami i wybierz spośród nich najmniejszą liczbę całkowitą, która jest większa od powyższej. Jest to liczba 3.

Zadanie 2.

Poprawna odpowiedź

PP

Wyjaśnienia

Zadanie sprawdza, czy potrafisz porównać wartości wyrażeń, w których występują potęgi o tych samych podstawach, wykorzystując do tego własność potęgowania iloczynu.

Pierwsze zdanie:

Wartość wyrażenia $12 \cdot 7^{13}$ jest większa od wartości wyrażenia $13 \cdot 7^{12}$.

- Aby stwierdzić, czy to zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe należy porównać ze sobą wartości wyrażeń:

$$12 \cdot 7^{13} \quad \text{i} \quad 13 \cdot 7^{12}$$

- W tym celu skorzystamy z zapisu potęgowego liczby po lewej stronie:

$$12 \cdot 7 \cdot 7^{12} \quad \text{i} \quad 13 \cdot 7^{12}$$

Zauważ, że każde z wyrażeń można zapisać w postaci iloczynu liczby całkowitej oraz potęgi liczby 7^{12} :

$$84 \cdot 7^{12} \quad \text{i} \quad 13 \cdot 7^{12}$$

- W obu wyrażeniach wystarczy zatem porównać liczby, przez które została pomnożona potęga 7^{12} :

$$84 > 13$$

- Liczba po lewej stronie jest większa, więc zdanie jest prawdziwe.

Drugie zdanie:

Liczba 3^{50} jest większa od liczby 6^{25} .

- Aby stwierdzić, czy to zdanie jest prawdziwe czy fałszywe, należy porównać ze sobą liczby:

$$3^{50} \quad \text{i} \quad 6^{25}$$

- Obie liczby zapiszemy tak, aby wystąpiły potęgi o tych samych podstawach. W tym celu skorzystamy z własności iloczynu potęg:

$$3^{50} = 3^{25+25} = 3^{25} \cdot 3^{25} \quad \text{i} \quad (2 \cdot 3)^{25} \\ 3^{25} \cdot 3^{25} \quad \text{i} \quad 2^{25} \cdot 3^{25}$$

- Zauważ, że w obu liczbach występuje ten sam czynnik 3^{25} . W związku z tym wystarczy porównać liczby mnożące ten czynnik:

$$3^{25} > 2^{25}$$

- Liczba po lewej stronie jest większa, więc zdanie jest prawdziwe.

Zadanie 3.

Poprawna odpowiedź

BD

Wyjaśnienia

To zadanie sprawdza, czy potrafisz mnożyć i dzielić wyrażenia arytmetyczne, w których występują pierwiastki.

Pierwsze zdanie:

- Aby stwierdzić, która odpowiedź jest prawidłowa, oblicz iloczyn liczb a i b :

$$ab = 9\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 27\sqrt{2^2} = 27 \cdot 2 = 54$$

- Aby stwierdzić, która odpowiedź jest prawidłowa, oblicz iloraz liczb a i b :

$$\frac{a}{b} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 3$$

Zadanie 4.

Przykładowe rozwiązanie

$$\frac{36^6}{27^5 \cdot 8^5} = \frac{(6^2)^6}{(3^3)^5 \cdot (2^3)^5} = \frac{6^{12}}{3^{15} \cdot 2^{15}} = \frac{6^{12}}{(3 \cdot 2)^{15}} = \frac{6^{12}}{6^{15}} = \frac{6^{12}}{6^{12} \cdot 6^3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

Wyjaśnienia

To zadanie sprawdza, czy potrafisz wykonywać obliczenia z wykorzystaniem własności działań na potęgach oraz mnożenie i dzielenie potęg, czyli umiejętności, które ćwiczyłeś, rozwiązując zadania 1.–2., a także podnoszenie potęgi do potęgi.

Zadanie 5.

Przykładowe rozwiązanie

Obliczymy wartość wyrażenia. Na początku skorzystamy z własności, że iloczyn pierwiastków dwóch liczb jest równy pierwiastkowi z iloczynu tych liczb:

$$\frac{21\sqrt{15}}{\sqrt{12+5\sqrt{3}}} = \frac{21\sqrt{3\cdot 5}}{\sqrt{4\cdot 3+5\sqrt{3}}} = \frac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+5\sqrt{3}}$$

Otrzymane wyrażenie przekształcamy dalej: w tym celu dodamy te same pierwiastki w mianowniku, następnie podzielimy licznik i mianownik przez ten sam pierwiastek:

$$\frac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+5\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \frac{21\cdot\sqrt{5}}{7} = 3\sqrt{5}$$

Porównamy otrzymaną wartość wyrażenia z liczbą 7:

$$3\sqrt{5} \quad \text{i} \quad 7$$

W tym celu obie dodatnie liczby podniesiemy do kwadratu:

$$(3\sqrt{5})^2 = 45 \quad \text{i} \quad 7^2 = 49$$

Ponieważ $45 < 49$, więc $3\sqrt{5} < 7$.

Wyjaśnienia

To zadanie sprawdza, czy potrafisz wykonywać złożone obliczenia z wykorzystaniem własności działań na pierwiastkach oraz czy potrafisz porównać dodatnie wyrażenia zawierające pierwiastki.

Zadanie 6.

Przykładowe rozwiązanie

Dane zapiszemy w takiej postaci, aby ułatwić obliczenia:

$$S = 0,001 \text{ m}^2 = \frac{1}{10^3} \text{ m}^2$$

$$y = 0,000001 \text{ m} = \frac{1}{10^6} \text{ m}$$

$$d = 19\,300 \text{ kg/m}^3 = 1,93 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$$

Masę złota obliczymy, korzystając z podanego wzoru na gęstość substancji oraz ze wzoru na objętość:

$$m = dV = dyS = 1,93 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{1}{10^6} \text{ m} \cdot \frac{1}{10^3} \text{ m}^2 = 1,93 \cdot \frac{10^4}{10^9} \text{ kg} = 1,93 \cdot 10^{4-9} \text{ kg}$$

$$m = 1,93 \cdot 10^{4-9} \text{ kg} = 1,93 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$$

Wyjaśnienia

Zadanie sprawdza, czy potrafisz odczytać i zapisać liczby w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdy $1 \leq a < 10$, k jest liczbą całkowitą.

Zwróć uwagę na to, że gdy zapiszesz duże lub małe liczby w notacji wykładniczej, i skorzystasz z praw działań na potęgach, to obliczenia się upraszczają.

II

Zadanie 1.

Poprawna odpowiedź

D

Wyjaśnienie

Zadanie sprawdza, czy potrafisz zapisać zależności przedstawione w zadaniu w postaci wyrażenia algebraicznego.

- W pierwszej kolejności zapisz wyrażenie opisujące kwotę spłaconą w pierwszych czterech ratach: $4a$.
- Następnie zapisz wyrażenia opisujące:
 - liczbę rat pozostałych do spłaty: $x - 4$
 - wysokość każdej z rat pozostałych do spłaty: $a + 100$
 - łączną kwotę pozostałą do spłaty: $(x - 4) \cdot (a + 100)$
- Dodaj wyrażenia, aby otrzymać wyrażenie opisujące spłaconą kwotę pożyczki:
 $4a + (x - 4) \cdot (a + 100)$

Zadanie 2.

Poprawna odpowiedź

PP

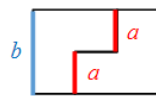
Wyjaśnienie

Zadanie sprawdza, czy potrafisz opisywać za pomocą wyrażeń algebraicznych zależności przedstawione na rysunku, redukować jednomiany podobne oraz odejmować sumy algebraiczne.

Pierwsze zdanie:

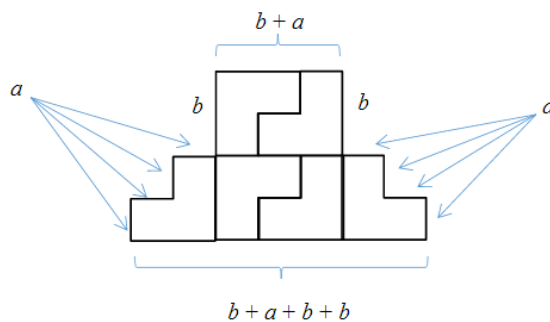
Obwód figury II jest równy $11b$.

- Aby stwierdzić, czy to zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe należy opisać za pomocą wyrażeń algebraicznych boki wielokąta, którym jest figura II. W pierwszej kolejności na podstawie układu dwóch jednakowych elementów trzeba ustalić zależność między odcinkami a i b :



$$b = 2a$$

- W kolejnym kroku należy opisać za pomocą wyrażenia algebraicznego obwód figury II.



$$Obw_{II} = (b + a + 2b) + a + a + a + a + b + (a + b) + b + a + a + a + a = 6b + 10a$$

- Wykorzystując zależność między odcinkami a i b , obwód figury II można zapisać w postaci wyrażenia z jedną zmienną:

$$Obw_{II} = 6b + 10a = 6b + 5 \cdot 2a = 6b + 5b = 11b$$

- Obwód figury II jest równy $11b$, więc zdanie jest prawdziwe.

Drugie zdanie:

Obwód figury II jest o $6a$ większy od obwodu figury I.

- Aby stwierdzić, czy to zdanie jest prawdziwe czy fałszywe, należy opisać za pomocą wyrażeń algebraicznych obwody obu figur, a następnie porównać je ze sobą:

$$Obw_{I} = (b + b) + b + (a + a) + (a + a) + b + (b + b)$$

$$Obw_{I} = 6b + 4a$$

$$Obw_{II} = 6b + 10a$$

- W celu porównania obwodów zapiszmy ich różnicę w najprostszej postaci:

$$Obw_{II} - Obw_{I} = 6b + 10a - (6b + 4a) = 6b + 10a - 6b - 4a = 6a$$

- Różnica obwodu figury II i figury I jest równa $6a$, zatem zdanie jest prawdziwe.

Zadanie 3.**Poprawna odpowiedź**

D

Wyjaśnienie

Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć wartość liczbową danego wyrażenia algebraicznego. W swoich obliczeniach powinieneś wykazać się umiejętnością wykonywania działań: dodawania, odejmowania, mnożenia i potęgowania liczb całkowitych.

W miejsce zmiennych x i y podstaw podane liczby 3 i (-2) , a następnie oblicz wartość liczbową każdego wyrażenia algebraicznego.

A. $3x + y^2 = 3 \cdot 3 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$

B. $3y - 2x = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -6 - 6 = -12$

C. $(x - 7) \cdot (2y - 1) = (3 - 7) \cdot [2 \cdot (-2) - 1] = (-4) \cdot (-5) = 20$

D. $(x + 3) \cdot (y + 2) = (3 + 3) \cdot (-2 + 2) = 6 \cdot 0 = 0$

Zadanie 4.**Poprawna odpowiedź**

A

Wyjaśnienie

Zadanie sprawdza, czy potrafisz zapisać zależności przedstawione w zadaniu w postaci wyrażenia algebraicznego dwóch zmiennych.

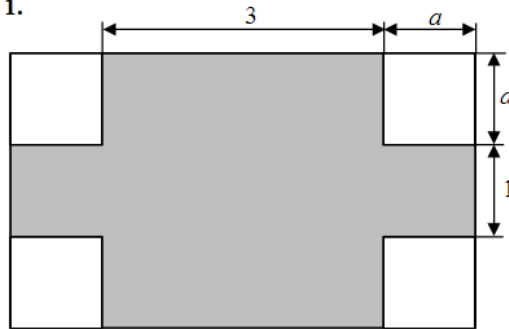
W pierwszym kroku zapisz wyrażenie opisujące, ile średnio jabłek Paweł zjada w ciągu jednego dnia, czyli $\frac{a}{b}$, a następnie pomnóż je przez liczbę dni w tygodniu. W ciągu tygodnia Paweł zjada 7 razy więcej jabłek niż w czasie jednego dnia, czyli

$$7 \cdot \frac{a}{b} = \frac{7a}{b}$$

Zadanie 5.

Przykładowe rozwiązania

Sposób 1.



Prostokąt, z którego wycięto narożniki w kształcie kwadratu, ma boki długości $(3 + 2a)$ i $(1 + 2a)$.

Pole tego prostokąta opisuje wyrażenie: $(3 + 2a) \cdot (1 + 2a)$

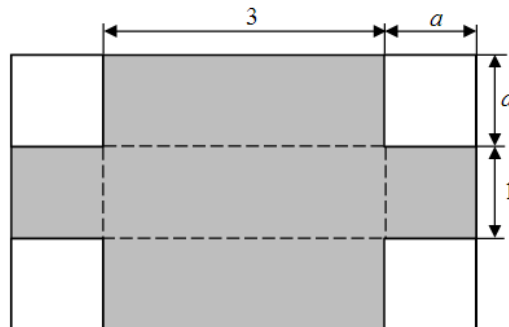
Po wycięciu narożników pole prostokąta zmniejszyło się o pola czterech kwadratów – każdy o polu a^2 .

Pole zacieniowanej figury opisuje zatem wyrażenie:

$$(3 + 2a) \cdot (1 + 2a) - 4a^2 = 3 + 6a + 2a + 4a^2 - 4a^2 = 8a + 3$$

Wartość otrzymanego wyrażenia dla $a = 2,5$ jest równa:

Sposób 2.



Zacieniowaną figurę można podzielić w różny sposób na kilka figur, np. tak, jak pokazano na rysunku.

Mamy dwa prostokąty o bokach długości 3 i a , jeden prostokąt o bokach długości 3 i 1 oraz dwa prostokąty o bokach długości a i 1.

Pole zacieniowanej figury opisuje zatem wyrażenie:

$$2 \cdot 3a + 3 \cdot 1 + 2 \cdot a = 6a + 3 + 2a = 8a + 3$$

Wartość otrzymanego wyrażenia dla $a = 2,5$ jest równa:

$$8 \cdot 2,5 + 3 = 20 + 3 = 23$$

Wyjaśnienie

Zadanie umożliwia zastosowanie różnych strategii rozwiązania, np. metodą podziału zacieniowanej figury na mniejsze figury składowe i w prosty sposób wyrażenia ich pól.

Sposób 2.

Pomyślana liczba została najpierw trzykrotnie powiększona, a następnie tyle samo razy pomniejszona, a na końcu odjęta od wyrażenia otrzymanego w poprzednim kroku. Wynik końcowy można zatem otrzymać dzieląc 6 przez 3.

Wyjaśnienie

Zadanie umożliwia zastosowanie oznaczeń literowych nieznanymi wielkościami liczbowymi i zapisanie w postaci wyrażenia algebraicznego informacji przedstawionych w treści zadania.